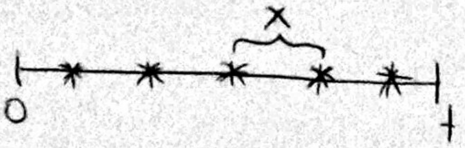
Εκθετική κατανομή



x = χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Ιδιότητα αμνησίας

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $X \sim Εκθ(\lambda)$ και $x, x_0 > 0$. Τότε $P(X > x + x_0 / X > x_0) = P(X > x)$

Παράδειγμα.

Χρόνος ζωής συσκευής σε ώρες $\sim Εκθ(\lambda = \frac{1}{500})$

α) P(να επιζήσει περισσότερο από 500 ώρες) = ?

β) P(-//- μεταξύ 500 και 600 ωρών) = ?

γ) P(-//- από 800 ώρες δεδομένου ότι έχει επιζήσει) = ?
περισσότερο από 300 ώρες

Λύση

Έστω X χρόνος ζωής. Τότε $X \sim \text{Εκθ}(\lambda = \frac{1}{500})$

α) $P(X>500) \underset{\bar{F}_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X>x)}{=\!=}$

$\int_{500}^{\infty} \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx = e^{-1} = 0,368$

$1 - P(X \leq 500) = 1 - F_X(500)$

β) $P(500 \leq X \leq 600) =$

$\int_{500}^{600} \frac{1}{500} \cdot e^{-\frac{x}{500}} dx = e^{-1} - e^{-1,2} = 0,0667$

$F_X(600) - F_X(500)$

γ) α' τρόπος

$P(X>800 \mid X>300) = P(X>500+300 \mid X>300) = P(X>500) = e^{-1} = 0,368$

Παράδειγμα

Αυτοκίνητα περνούν τις νυχτερινές ώρες από ένα πρατήριο βενζίνης με ρυθμό 2 αυτοκίνητα ανά 10 λεπτά. Αν ένα αυτοκίνητο εξυπηρετηθεί ποια η πιθανότητα το πρατήριο να μείνει χωρίς αυτοκίνητο περισσότερο από 16 μιν.

Λύση

α' τρόπος

Έστω X ο χρόνος που μεσολαβεί από την στιγμή που εξυπηρετείται το αυτοκίνητο μέχρι την στιγμή που θα έρθει το αμέσως επόμενο. Το X είναι χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων Poisson άρα

$X \sim \text{Εκθ}(\lambda = 0,2)$

Στα 10 min 2 αυτοκ.

1 min $\lambda = ?$

Άρα $\lambda = \frac{2}{10} = 0,2$

$$P(X>16) = \begin{cases} \int_{16}^{\infty} 0,2\, e^{-0,2x}\, dx \\ 1 - F_X(16) \end{cases}$$

β' τρόπος

Έστω X χρόνος (σε 16 λεπτά) που μεσολαβεί μέχρι την άφιξη του αμέσως επόμενου αυτοκινήτου. Τότε $X \sim Εκθ(\lambda = 3,2)$

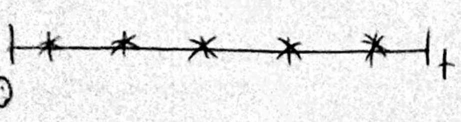
Στα 10 min 2 αυτ.

16 min $\lambda = ?$

Άρα $\lambda = \frac{32}{10} = 3,2$

$$P(X>1) = \begin{cases} \int_{1}^{\infty} 3,2\, e^{-3,2x}\, dx \\ 1 - F_X(1) \end{cases}$$

Κατανομή Erlang - Κατανομή Γάμμα



Έστω $N(t)$ πλήθος αφίξεων (*) στο $(0,t)$, $N(t) \sim P(\lambda t)$

$$P(N(t)=r) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^r}{r!} \quad r = 0,1,2,\ldots$$

Έστω X ο χρόνος ζωής μεταξύ n διαδοχικών αφίξεων (π.χ. ο χρόνος μεταξύ της $(i+1)$ και της $(i+n)$ άφιξης $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Το X είναι τ.μ. με τιμές $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

$P(X > x) = P($το πολύ $n-1$ αφίξεις σε χρόνο x, $x > 0) =$

$$= P(N(x) \leq n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N(x) = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}$$

Άρα $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = 1 - P(X > x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} \quad x > 0$$

Συνολικά

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Η σ.π.π (μπορεί να) είναι $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

Με πράξεις ....

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

όπου Γ είναι η συνάρτηση γάμμα που ορίζεται $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$

$a > 0$

Ιδιότητες

$\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ $\quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

Παρατήρηση

- Για $n=1$ η f_X ανάγεται στη σ.π.π της $Εκθ(\lambda)$
- Είναι η f_X σ.π.π? ΝΑΙ γιατί

(i) $f_X(x) \geq 0$

(ii) Αποδεικνύεται ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Πρόταση

Έστω η τ.μ παριστά το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) διαδοχικών αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson. Τότε η τ.μ X είναι συνεχής με σ.π.π

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση

1) Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $n = \frac{m}{2}$ τότε

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{m/2}\,\Gamma(m/2)}\, x^{(m/2)-1} e^{-x/2} \qquad x>0$$

Αυτή είναι η χ-τετράγωνο κατανομή με n-βαθμούς ελευθερίας

Συμβολίζεται χ^2_n

2) Από την απόδειξη

$$P(X>t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad (*)$$

Επίσης $P(X>t) = \int_t^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_t^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \quad (**)$

Το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται αναλυτικά

Από τις $(*), (**)$

$$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_t^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Κατανομή Γάμμα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.μ. X με τιμές $x>0$. Η X λέγεται γάμμα με παραμέτρους a και b, $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$ $b>0$, αν η σ.π.π της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b^n \Gamma(a)} x^{a-1} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

Συμβολισμός $X \sim G(a,b)$

Παρατήρηση

Αν $n=a$ και $\lambda = \frac{1}{b}$ Τότε $G(a,b) \equiv Erlang(n,\lambda)$

Παράδειγμα.

Πελάτες φτάνουν στο ταμείο ενός πολυκαταστήματος για να εξυπηρετηθούν με ρυθμό 2 πελάτες ανά λεπτό. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

α) να φτάσουν στο ταμείο λιγότεροι από 2 πελάτες σε διάστημα 3 min

β) το ταμείο να μείνει χωρίς πελάτη περισσότερο από 2 λεπτά αν εξυπηρετηθεί πρώτα ένας πελάτης.

γ) ο χρόνος που θα χρειαστεί για την άφιξη του μεθεπόμενου πελάτη να είναι μικρότερη από 3 min, αν εξυπηρετηθεί πρώτα ένας πελάτης.

Λύση

α) Έστω X πλήθος πελατών στα 3 min. $X \sim P(\lambda = 6)$

1 min — 2 πελάτες
3 — $\lambda = ?$

Άρα $\lambda = 6$

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-6} 6^x}{x!} = 0{,}0174$$

β) Έστω Y ο χρόνος σε λεπτά μέχρι του επόμενο πελάτη $Y \sim Εκθ(\lambda = 2)$

$$P(Y>2) \begin{cases} \int_2^{\infty} 2e^{-2x}\,dx \\ 1 - F_X(2) \end{cases}$$

γ) Έστω Z τ.μ. παριστά το χρόνο σε λεπτά μέχρι την άφιξη του μεθεπόμενου πελάτη.

$Z \sim Erlang(n = 2, \lambda = 2)$

$$P(Z<3)=1-P(Z\geq 3)=1-\int_3^{\infty}\frac{2^2}{\Gamma(2)}x^{2-1}e^{-2x}dx=$$

$$=1-\sum_{k=0}^{2-1}\frac{e^{-2\cdot 3}(2\cdot 3)^k}{k!}=1-7e^{-6}$$

Κατανομή Βήτα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ X λέγεται βήτα με παράμετρο a, b $(a,b\in\mathbb{R}, a>0, b>0)$ αν οι τιμές της $x\in(0,1)$ και σ.π.π.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & , 0<x<1\\ 0 & ,\text{αλλού}\end{cases}$$

Συμβολισμός $\quad X\sim B(a,b)$ ή $X\sim Beta(a,b)$

Συνάρτηση Βήτα

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad , a>0, \quad b>0$$

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Παρατήρηση

Αν $a=1$ και $b=1$ τότε $Beta(a=1,b=1)\equiv U(0,1)$

Η Βήτα κατανομή γεννιέται από τη συνάρτηση Βήτα γιατί

$$B(a,b)\overset{\text{ορ}}{=}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\Rightarrow 1=\int_0^1\underbrace{\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}}_{f_X}dx$$